数理解析研究所講究録
1151巻 2000年 85-97

ON FREE $\mathbb{Z}^d$ ACTION OF CANTOR MINIMAL SYSTEMS AND ORBIT EQUIVALENCE

慶應義塾大学 学振研究員 杉崎 文亮 (Fumiaki SUGISAKI)

概要

この講究録は Skau が [Sk1] の中で言及している予想の $G=\mathbb{Z}^d$ の場合について述べる。今のところこの予想に対する回答はされていないが，Forrest がそれに関連する興味深い結果 ([Fo]) を示しているので，その紹介をする。最後に予想がある特別な場合正しいことを示す。

1 はじめに

まず初めに研究の動機である Skau の予想について紹介する。

予想 1.1 (Skau 1996 [Sk1]). X を Cantor 集合，G を X 上で同相的に作用する可算アメナブル群で以下の性質を満たすものとする。

(1) G は minimal に作用する。($\forall x \in X$, $\{g(x) \mid g \in G\}$ は X で稠密)
(2) G は free に作用する。($x \in X$, $g(x)=x$ ならば g は恒等写像)

このとき X 上 minimal に作用する同相写像 S が存在して，2つの力学系 (X,G) と (X,S) は軌道同型になるだろう。

ここで2つの力学系 (X,G) と (X,S) が軌道同型であるとは，X 上の同相写像 F が存在し，$\{F\circ g(x) \mid g\in G\}=\{S^n\circ F(x) \mid n\in\mathbb{Z}\}$ が勝手な $x\in X$ に対して成立することをいう。この予想は Connes-Feldman-Weiss ([CFW]) によるエルゴード的非特異変換群から引き起こされるアメナブル同値関係は，あるエルゴード変換による $\mathbb{Z}$ 作用から引き起こされる同値関係になっているという定理の topological version と理解できる。今のところこの予想に対しての回答は得られていない。では G をもっと特別な群に対してこの予想の回答は得られないであろうか。そこで $G=\mathbb{Z}^d$ の場合を考察することにする。残念ながらこの場合に関しても回答は得られていないが，Forrest ([Fo]) によって興味深い結果が得られているので，ここで紹介をする。

定理 1.2 ([Fo]:Theorem 0.5). $(X, \mathbb{Z}^d)$ を free Cantor minimal system とする。このとき X の部分集合 Y と X 上の minimal な同相写像 S が存在して以下の条件を満たす。

(1) Y は nowhere dence。
(2) Y は $\mathbb{Z}^d$ 不変かつ S 不変集合。
(3) 任意の $\mathbb{Z}^d$ 不変かつ S 不変測度 μ に対して $\mu(Y) = 0$ となる。
(4) 任意の $x \in X \setminus Y$ に対して $\{T^z(x) \mid z \in \mathbb{Z}^d\} = \{S^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が成り立つ。

この定理の中でもっとも興味深いのは (4) の主張である。これが Y という除外集合上でも成立すれば Skau の予想の $G = \mathbb{Z}^d$ の場合は正しいことになる。Forrest はこの定理を証明する際に，$(X, \mathbb{Z}^d)$ から Bratteli diagram $\mathcal{B}$ を作り，それから infinite path space $X_{\mathcal{B}}$ を考えた。このとき $(X, \mathbb{Z}^d)$ の軌道構造は $X_{\mathcal{B}}$ の（後に定義する) cofinal な構造とある意味で関係していることを示した。Skau の予想の $G = \mathbb{Z}^d$ の場合を考えるには，Y と $X_{\mathcal{B}}$ の cofinal な構造を調べることが重要であることが容易に分かる。

2 Bratteli diagram に関する定義

2.1 Bratteli diagram

Bratteli diagram とは，頂点からなる集合 V と辺からなる集合 E の二つの組 (V, E) からなり，次の条件を満たす。まず V は可算個の互いに疎な有限集合 V_n $(n \geq 0)$ に分割され，特に $|V_0| = 1$ を満たす。E も可算個の互いに疎な有限集合 E_n $(n \geq 1)$ に分割される。また V と E との関係は二つの写像 $r, s : E \to V$ によって $r(E_k) \subset V_k$, $s(E_k) \subset V_{k-1}$ $(k \geq 1)$ として特徴付けられる。この r, s をそれぞれ range map, sorce map と呼ぶことにする。ここですべての $v \in V$ に対して $s^{-1}(v) \neq \emptyset$，またすべての $v \in V \setminus V_0$ に対して $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ を仮定する。

$n \geq 0$ に対して $V_n = \{v_i^{(n)} \mid 1 \leq i \leq |V_n|\}$ と書くことにする。$m_{i,j}^{(n)}$ を $v_j^{(n-1)}$ と $v_i^{(n)}$ を結ぶ辺の本数とする。このとき行列 $M^{(n)} = (m_{i,j}^{(n)})$ を n 番目の接続行列 (incidence matrix) と呼ぶ。

Bratteli diagram (V, E) が simple であるとは，任意の $k \geq 0$ に対して，k より大きい自然数 n があり，$v \in V_k$, $u \in V_n$ である任意の頂点 v, u に対して，その 2 頂点を結ぶ path が存在することを言う。ここで path とは文字通り辺と辺を (同じ頂点を接点として) 結ぶことが出来るものをいう。simple であることを接続行列を用いて言い直すと，接続行列の積 $M^{(n)} M^{(n-1)} \ldots M^{(k+1)}$ のすべての成分が正であることを意味する。$\mathcal{P}(V_n)$ を V_0 と V_n とを結ぶ path 全体の集合とする。

2.2 infinite path space

simple Bratteli diagram $\mathcal{B} = (V, E)$ を与えたときに，それに付随して infinite path space $X_{\mathcal{B}}$ を sorce map, range map を用いて $X_{\mathcal{B}} = \{(e_1, e_2, \cdots) \mid r(e_n) = s(e_{n+1})\ n \geq 1\}$ のように定義する。この $X_{\mathcal{B}}$ に次のように位相を入れる。筒集合 $U(e_1, e_2, \cdots, e_k) = \{(f_1, f_2, \cdots) \in X_{\mathcal{B}} \mid f_i = e_i\ 1 \leq i \leq k\}$ を開集合とする。この筒集合から作られる開集合系で位相を決定する。なおこの筒集合は同時に閉であることが分かること，及び距離付け可能かつ diagram の simpleness から孤立点が存在しないことが分かるので，$X_{\mathcal{B}}$ は Cantor 集合になることが分かる。

2.3 oredered Bratteli diagram

次に Bratteli diagram (V, E) の辺 E に半順序関係 "$\geq$" を入れることを考える。2つの辺 $e, f \in E$ が比較可能であるとは，$r(e) = r(f)$ が成り立つときを言う。この順序を込みにした $(V, E, \geq)$ のことを，ordered Bratteli diagram と呼ぶことにする。$E_{\min}$，$E_{\max}$ を E の部分集合で半順序関係 $\geq$ における極小元，極大元からなる集合とする。$(V, E, \geq)$ が proper であるとは，(V, E) が simple であり，かつ $E_{\min}$ の元からなる infinite path $p_{\min} \in X_{\mathcal{B}}$ と $E_{\max}$ の元からなる infinite path $p_{\max} \in X_{\mathcal{B}}$ がそれぞれ唯一つだけ存在することをいう。

2.4 Bratteli-Vershik system

$\mathcal{B} = (V, E, \geq)$ を properly ordered Bratteli diagram とし，$p_{\max}$，$p_{\min}$ をそれぞれ $X_{\mathcal{B}}$ 上の maximal，minimal infinite path であるとする。今から $X_{\mathcal{B}}$ 上での同相写像 $\lambda_{\mathcal{B}}$ を次のように定義する。まず $\lambda_{\mathcal{B}}(p_{\max}) = p_{\min}$ とする。もし $p = (e_1, e_2, \cdots) \neq p_{\max}$ ならば，$k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid e_i \notin E_{\max}\}$ とおき，$f_k \in E$ を e_k の次の順序の辺であるとする。更に $(f_1, f_2, \cdots, f_{k-1})$ を $\mathcal{P}(V_{k-1})$ の path のうち $r(f_{k-1}) = s(f_k)$ を満たし，かつ最小のものであるとする。このとき $\lambda_{\mathcal{B}}(p) = (f_1, f_2, \cdots, f_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \cdots)$ と定義する。この写像 $\lambda_{\mathcal{B}}$ のことを，Vershik 変換と呼ぶ。簡単な考察により $\lambda_{\mathcal{B}}$ は minimal な同相写像であることが分かる。この二組 $(X_{\mathcal{B}}, \lambda_{\mathcal{B}})$ のことを， Bratteli-Vershik system と呼ぶ。

3 力学系から Bratteli diagram の構成

この節では実際に力学系から Bratteli diagram の構成を行うことにする。Forrest による $\mathbb{Z}^d$ action の場合における構成は，Herman, Putnam, Skau 等による $\mathbb{Z}$ action の場合をお手本にしており，その意味でも初めに $\mathbb{Z}$ action の場合の構成を先に示す方がわかり

やすいと思われる。ここで開かつ閉である集合を clopen set と呼ぶことにする (closed + open = clopen)。

3.1 $\mathbb{Z}$ action の場合の構成

ここで行う構成を詳しく知りたい場合は, [HPS] を見られたい。Cantor minimal system (X,T) に対して, clopen set の列 $\{U_n\}_{n\geq 0}$ と, X の clopen set からなる分割の列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 0}$ で次の条件を満たすものを与える。

- $X = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ かつ $x_0 \in X$ が存在して, $\cap_{n\geq 0} U_n = \{x_0\}$ を満たす。
- $\{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 1}$ は分割として細かくなっていく。($\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_3 \prec \cdots$)
- $\vee_{n\geq 1}\mathcal{P}_n$ は X の位相を形成する。

定義 3.1 (first return time). U_n と $x \in U_n$ に対して, $R_n : U_n \to \mathbb{N}$ を

$$R_n(x) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid T^m x \in U_n\},\ x \in U_n$$

と定義する。この $R_n(x)$ を x の U_n に対する first return time と呼ぶ。

この定義からすぐに R_n は連続であることが分かる。U_n のコンパクト性から $R_n(U_n)$ は有限集合になる。そこで $I_n = |R_n(U_n)|$ とおく。更に $R_n(U_n) = \{m_1^{(n)} < m_2^{(n)} < \cdots < m_{I_n}^{(n)}\}$ と書くことにする。R_n と I_n を用いて U_n を I_n 個の clopen set $U_n(i) = \{x \in U_n \mid R_n(x) = m_i^{(n)}\}$ (但し,$1 \leq i \leq I_n$) に分割する。T の minimality と U_n のコンパクト性から $\mathcal{Q}'_n = \{T^m U_n(i) \mid 1 \leq i \leq I_n,\ 0 \leq m < m_i^{(n)}\}$ は clopen set からなる X の分割なる。($\mathcal{Q}'_n$ のことを 角谷-Rohlin 分割と呼ぶ。) 更に帰納的に角谷-Rohlin 分割 $\mathcal{Q}_n$ を次のように構成する。$\mathcal{Q}_0 = \{X\}$ とおく。今 $n \geq 1$ に対して, $\mathcal{Q}_{n-1}$ がすでに構成されていると仮定する。次に $U_n(i)$ をこれから定義する $J_n(i)$ 個の clopen sets に分割する。

$$\left\{P \cap U_n(i) \mid P \in \bigvee_{m=0}^{m_i^{(n)}-1} T^{-m}(\mathcal{Q}_{n-1} \vee \mathcal{P}_n) \text{ かつ } P \cap U_n(i) \neq \emptyset\right\}$$
$$\underset{\text{def.}}{=} \{U_n(i,j) \mid 1 \leq j \leq J_n(i)\}.$$

これら $U_n(i,j)$ を用いて $\mathcal{Q}_n$ を次のように定義する。

$$\mathcal{Q}_n = \{T^m U_n(i,j) \mid 1 \leq i \leq I_n,\ 1 \leq j \leq J_n(i),\ 0 \leq m < m_i^{(n)}\}.$$

明らかに $\mathcal{Q}_n \succ \mathcal{P}_n$, $\mathcal{Q}_n \succ \mathcal{Q}'_n$, $\mathcal{Q}_n \succ \mathcal{Q}_{n-1}$ が成り立つ。ここで $\{\mathcal{Q}_n\}_{n\geq 0}$ を用いて Bratteli diagram (V,E), source map s, range map r, 半順序 $\geq$ を

$$\begin{aligned}
V_n &= \{(n,i,j) \mid 1 \leq i \leq I_n,\ 1 \leq j \leq J_n(i)\}\ (n \geq 1), \quad V_0 = \{(0,1,1)\}, \\
E_n &= \{(i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, j_n, m_n) \mid U_{n-1}(i_{n-1}, j_{n-1}) \supset T^{m_n} U_n(i_n, j_n)\ 0 \leq m_n < m^{(n)}_{i_n}\}, \\
& s(i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, j_n, m_n) = (n-1, i_{n-1}, j_{n-1}) \in V_{n-1}, \\
& r(i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, j_n, m_n) = (n, i_n, j_n) \in V_n, \\
& (i'_{n-1}, j'_{n-1}, i'_n, j'_n, m'_n) \geq (i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, j_n, m_n) \\
& \iff i'_n = i_n,\ j'_n = j_n \text{ and } m'_n \geq m_n
\end{aligned} \tag{3.1}$$

のように定義する。この $\mathcal{B} = (V, E, \geq)$ を (X,T) に付随した ordered Bratteli diagram と呼ぶ。Herman, Putnam, Skau は Cantor minimal system と Bratteli-Vershik system に関する次の基本定理を得た。

定理 3.2 ([HPS]). 上の構成において，$(X_\mathcal{B}, \lambda_\mathcal{B})$ を $\mathcal{B}$ の Bratteli-Vershik system とする。このとき同相写像 $\varphi : X \to X_\mathcal{B}$ が存在して以下の条件を満たす。

(1) $\varphi \circ T = \lambda_\mathcal{B} \circ \varphi$ (つまり φ は共役写像になる。)
(2) $\varphi(x_0) = p_{\min}$ かつ $\varphi(T^{-1}x_0) = p_{\max}$，但し $p_{\min}$ $(p_{\max})$ は $X_\mathcal{B}$ の唯一つしかない minimal (maximal) path である。
(3) $\varphi(x) = \{(i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, j_n, m_n)\}_{n\geq 1} \in X_\mathcal{B}$ とすれば，$\{x\} = \cap_{n\geq 1} T^{\sum_{k=1}^n m_k} U_n(i_n, j_n)$ が成立する。

この定理を軌道の立場から眺め直してみる。そのため次の定義を与える。

定義 3.3 (coorbital, cofinal). (X,T) を Cantor minimal system, $(X_\mathcal{B}, \lambda_\mathcal{B})$ を (X,T) に付随した Bratteli-Vershik system とする。

- $x, y \in X$ に対して，x と y が coorbital であるとは，ある整数 n が存在して $T^n x = y$ が成り立つことをいう。このとき $x \sim y$ と書くことにする。

- $p, q \in X_\mathcal{B}$ に対して，p と q が cofinal であるとは，$p = (p_1, p_2, \cdots)$, $q = (q_1, q_2, \cdots)$ と書き表したとき，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$ であるすべての自然数 n に対して，$p_n = q_n$ が成り立つことをいう。言い換えれば p と q は有限個の辺を除いてすべて一致していることをいう。このとき $p \approx q$ と書くことにする。

定理 3.2 から分かることは，以下の通りである。

- $p \approx q$ ならば，$\varphi^{-1}(p) \sim \varphi^{-1}(q)$ である。

- $x, y \in X \setminus \{T^n x_0 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ かつ $x \sim y$ ならば，$\varphi(x) \approx \varphi(y)$ である。
- $p_{\min} = p_+$, $p_{\max} = p_-$ とおく。$x_+, y_+ \in \{T^n x_0 \mid n \geq 0\}$, $x_-, y_- \in \{T^n x_0 \mid n < 0\}$ に対して，$\varphi(x_\pm) \approx \varphi(y_\pm) \approx p_\pm$, (復号同順), $\varphi(x_+) \not\approx \varphi(x_-)$ が成立する。

つまり (X, T) の軌道の情報は，x_0 の軌道を除けば，$X_{\mathcal{B}}$ 上での cofinal 構造にすべて移植できることを意味する。Vershik 変換は $\lambda_{\mathcal{B}}(p_{\max}) = p_{\min}$ とすることで，二つの異なる cofinal 構造を強引に "つなぎ合わせて" x_0 の軌道の情報を保つようにしているといえる。

3.2 $\mathbb{Z}^d$ action の場合の構成 (但し $d \geq 2$)

ここで行う構成を詳しく知りたい場合は, [Fo] を見られたい。$\mathbb{Z}^d$ action の場合，$\mathbb{Z}$ action の場合と異なり，first return time を定義することが出来ない。それは $\mathbb{Z}$ の場合，0 (原点) から発散する方向が正方向，負方向の 2 つしかないが，$\mathbb{Z}^d$ の場合は方向が無限通り考えられることが関係している。従って first return time に取って代わる新しいものを用意する必要がある。その前に $\mathbb{Z}$ action の場合と同様に，Free Cantor minimal system $(X, \mathbb{Z}^d)$ に対して，clopen set の列 $\{U_n\}_{n\geq 0}$ と，X の clopen set からなる分割の列 $\{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 0}$ で次の条件を満たすものを与える。

- $X = U_0 \supsetneqq U_1 \supsetneqq U_2 \supsetneqq \cdots$ (注 : $\cap_{n\geq 0} U_n = \{x_0\}$ は仮定しない。理由は後に述べる。)
- $\{\mathcal{P}_n\}_{n\geq 1}$ は分割として細かくなっていく。($\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_3 \prec \cdots$)
- $\vee_{n\geq 1} \mathcal{P}_n$ は X の位相を形成する。

ここで hitting time と呼ばれる first return time に代わるものを用意する。

定義 3.4 (hitting time). U_n と $x \in U_n$ に対して,

$$H(x, U_n) = \{z \in \mathbb{Z}^d \mid T^z x \in U_n\} \subset \mathbb{Z}^d$$

と定義する。この $H(x, U_n)$ を x の U_n に対する hitting time と呼ぶ。

$(X, \mathbb{Z}^d)$ の Bratteli diagram を構成するにあたり，その方法を "公理化" して書いてみたい。それは構成の仕方が一意的ではないので，今後の問題に対する方向によって構成を変えることが出来るからである。より具体的にいうと $x \in X$ に対して, $\mathbb{Z}^d$ の部分集合のある族 $\{K_n(x, h) \subset \mathbb{Z}^d \mid h \in H(x, U_n)\}$ の構成の仕方で Bratteli diagram の形は変わってしまう。まずはその族 $\{K_n(x, h) \subset \mathbb{Z}^d \mid h \in H(x, U_n)\}$ で次の性質を満たすものを考える。

性質 3.5.(P1) $w \in K_n(x, h)$.
(P2) $w + z \in H(x, U_n)$ を満たす任意の $w, z \in \mathbb{Z}^d$ に対して，$K_n(x, w+z) = K_n(T^z x, w) + z$.

(P3) $w \neq w' \Rightarrow K_n(x,w) \cap K_n(x,w') = \emptyset$.
(P4) $\cup_{w \in H(x,U_n)} K_n(x,w) = \mathbb{Z}^d$.
(P5) 任意の $x \in X$, $h \in H(x,U_n)$ に対して，$K_n(x,h)$ は有限集合。
注意：

- **(P3),(P4),(P5)** より，任意の $x \in X$ に対して $\{K_n(x,h) \mid h \in H(x,U_n)\}$ は $\mathbb{Z}^d$ の分割になり, 分割された $\mathbb{Z}^d$ の各部分集合は有限である。

- **(P3),(P4)** より，任意の $x \in X$ に対して一意的に定まる $h_x^{(n)} \in H(x,U_n)$ で，$0 \in K_n(x,h_x^{(n)})$ となるものが存在する。

- $x \in U_n$ であることと，$h_x^{(n)} = 0$ であることは同値。

(P6) ある $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ が存在して，$d(x,y) < \varepsilon$ を満たすすべての x,y に対して $K_n(x,w_x^{(n)}) = K_n(y,w_y^{(n)})$ が成り立つ。(これは $K_n(\cdot,h_\cdot^{(n)}) : X \to \{\mathbb{Z}^d$ の部分集合$\}$ の一様連続性を表す。)
(P7) $K_n(x,w_n) \cap K_{n+1}(x,w_{n+1}) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; K_n(x,w_n) \subset K_{n+1}(x,w_{n+1})$.

注意：

- 任意の $x \in X$ に対して，$K_1(x,h_x^{(1)}) \subset K_2(x,h_x^{(2)}) \subset K_3(x,h_x^{(3)}) \subset \cdots$ が成り立つ。

これら性質を満たす $K_n(x,h)$ を用いて $(X,\mathbb{Z}^d)$ に付随する Bratteli diagram を構成する。最初に U_n の元に対して同値関係 $\equiv$ を

$$x \equiv y \underset{\text{def.}}{\iff} K_n(x,0) = K_n(y,0)$$

と定義し，$\equiv$ を用いて U_n を分割する。それを $\{U_n(i) \mid 1 \le i \le I_n\}$ とおく。$(I_n = |U_n/\equiv|)$ U_n のコンパクト性と **(P6)** から I_n は有限になる。今 $1 \le i \le I_n$ を満たす i に対して $K_n(i) = K_n(x,0)$ $(x \in U_n)$ と定義すると，この定義は x の選び方に依存しないのは明らかである。以下の構成は $\mathbb{Z}$ action の場合と同様に行うことに注意されたい。
$\mathcal{Q}'_n = \{T^z U_n(i) \mid 1 \le i \le I_n,\ z \in K_n(i)\}$ は clopen set からなる X の分割となる。更に帰納的に角谷-Rohlin 分割 $\mathcal{Q}_n$ を次のように構成する。$\mathcal{Q}_0 = \{X\}$ とおく。 今 $n \ge 1$ に対して, $\mathcal{Q}_{n-1}$ がすでに構成されていると仮定する。次に $U_n(i)$ をこれから定義する $J_n(i)$ 個の clopen sets に分割する。

$$\left\{ P \cap U_n(i) \mid P \in \bigvee_{z \in K_n(i)} T^{-z}(\mathcal{Q}_{n-1} \vee \mathcal{P}_n) \text{ かつ } P \cap U_n(i) \neq \emptyset \right\}$$
$$\underset{\text{def.}}{=} \{U_n(i,j) \mid 1 \le j \le J_n(i)\}.$$

これら $U_n(i,j)$ を用いて $\mathcal{Q}_n$ を次のように定義する。

$$\mathcal{Q}_n = \{T^z U_n(i,j) \mid 1 \le i \le I_n,\ 1 \le j \le J_n(i),\ z \in K_n(i)\}.$$

明らかに $\mathcal{Q}_n \succ \mathcal{P}_n$, $\mathcal{Q}_n \succ \mathcal{Q}'_n$, $\mathcal{Q}_n \succ \mathcal{Q}_{n-1}$ が成り立つ。($d=1$ の場合, 上で $z \to m$, $K_n(i) \to [0, m_i^{(n)})$ とすると同じになる。) ここで $\{\mathcal{Q}_n\}_{v \ge 0}$ を用いて Bratteli diagram (V,E), source map s, range map r を (3.1) のように定義する。(この場合は半順序は定義できない。) これにより $(X, \mathbb{Z}^d)$ に付随した Bratteli diagram を構成することが出来た。

3.3 Forrest による $K_n(x,h)$ の構成

ここでは, Forrest が行った $K_n(x,h)$ の構成を紹介する。その前に $\mathbb{Z}^d$ 上での辞書的順序 (lexicographical order) $<_{lex}$ を次のように定義しておく。$z = (z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$ と $w = (w_1, \cdots, w_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$z <_{lex} w \quad \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 1 \le j \le d \text{ である } j \text{ が存在して以下を満たす：} \\ z_i = w_i \quad 1 \le \forall i \le j-1 \\ z_j < w_j \end{cases}$$

定義 3.6 (Voronoi domain). $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $h \in H(x, U_n)$ に対して $\mathrm{Vor}_n(x,h) \subset \mathbb{Z}^d$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathrm{Vor}_n(x,h) = \{w \in \mathbb{Z}^d \ &: \|w-h\| < \|w-h'\| \ \text{ for } h' \in H(x,U_n) \setminus \{h\} \\ &\text{or } \|w-h\| = \|w-h'\| \text{ with } h >_{lex} h' \in H(x,U_n)\}\end{aligned}$$

ここで $\|\ \ \|$ は d 次元ユークリッドノルムを表す。$\mathrm{Vor}_n(x,h)$ のことを Voronoi domain と呼ぶ。

ここで $K_n(x,h)$ を帰納的に次のように定義する。

$$K_n(x,h) = \begin{cases} \mathrm{Vor}_1(x,h), & n=1 \text{ のとき} \\ \cup\{K_{n-1}(x,h') \mid h' \in H(x,U_{n-1}) \cap \mathrm{Vor}_n(x,h)\}, & n>1 \text{ のとき} \end{cases}$$

この $K_n(x,h)$ は性質 3.5 の **(P6)** を除いて成立することがすぐ分かる。**(P6)** が成り立つことは $H(\cdot, U)$ が次の意味で一様連続であることから分かる。(但し U は clopen set) 任意の $r>0$ に対して $\delta = \delta(U,r) > 0$ が存在して $d(x,y) < \delta$ を満たすすべての $x, y \in U$ に対して $H(x,U) \cap B_r(0) = H(y,U) \cap B_r(0)$ が成立することをいう。ここで d は X 上の距離, $B_r(z) = \{w \in X \mid d(z,w) < r\}$ である。

4 Forrest の定理

この節では定理 1.2 の結果の詳細を述べる。そのためにいくつかの定義を与える。なお $\{\boldsymbol{e}_i \mid 1 \le i \le d\}$ を $\mathbb{Z}^d$ の正規直交基底とする。

定義 4.1. • $A \subset \mathbb{Z}^d$ とする。$z \in \partial A$ であるとは，$z \in A$ かつ ある基底 $\boldsymbol{e}_j$ が存在して $z + \boldsymbol{e}_j \notin A$ または $z - \boldsymbol{e}_j \notin A$ が成立することをいう。

• X の部分集合 $Y_n, Y^\sharp, Y$ を次のように定義する。

$$Y_n = \bigcup_{i=1}^{I_n} \bigcup_{z \in \partial K_n(i)} T^z U_n(i), \quad Y^\sharp = \bigcap_{n \ge 1} Y_n, \quad Y = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^d} T^z Y^\sharp$$

• $\overline{r_n}, \underline{r_n}$ を次のように定義する。

$$\overline{r_n} = \max_{1 \le i \le I_n} \left(\sup\{r > 0 \mid B_z(r) \cap \mathbb{Z}^d \subset K_n(i)\ \exists z \in K_n(i)\}\right)$$
$$\underline{r_n} = \min_{1 \le i \le I_n} \left(\sup\{r > 0 \mid B_z(r) \cap \mathbb{Z}^d \subset K_n(i)\ \exists z \in K_n(i)\}\right)$$

• λ_n を次のように定義する。

$$\lambda_n = \max_{1 \le i \le I_n} (\inf\{\varepsilon > 0 \mid K_n(i) \text{ は } \varepsilon\text{-Følner である }\})$$

ここで有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^d$ が ε- Følner であるとは，$\sharp(A \triangle (A + z)) \le \varepsilon |A| \|z\|$ が任意の $z \in \mathbb{Z}^d$ で成り立つことをいう。

定理 4.2 ([Fo]). $(X, \mathbb{Z}^d)$ を free Cantor minimal system とし，$\mathcal{B} = (V, E)$ を Forrest の構成法による $(X, \mathbb{Z}^d)$ に付随した Bratteli diagram であるとする。このとき同相写像 $\varphi : X \to X_{\mathcal{B}}$ が存在して以下の条件を満たす。

(1) $p \approx q$ ならば，$\varphi^{-1}(p) \sim \varphi^{-1}(q)$ である。
(2) $x, y \in X \setminus Y$ かつ $x \sim y$ ならば，$\varphi(x) \approx \varphi(y)$ である。
(3) $\overline{r_n} \to \infty$ $(n \to \infty)$ ならば，Y は nowhere dense となる。
(4) $\underline{r_n} \to \infty$ $(n \to \infty)$ ならば，$\mathcal{B}$ は simple Bratteli diagram になる。
(5) $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば，任意の $\mathbb{Z}^d$ 不変測度 μ に対して $\mu(Y) = 0$ となる。

ここで $\sim$, $\approx$ はそれぞれ coorbital, cofinal 同値関係であり，特に $\sim$ は定義 3.3 で $\mathbb{Z}^d$ action の場合に置き換えたものである。

この定理の興味深いところは (1), (2) の部分である。$x \in X$ に対して $A(x) = \cup_{n \ge 1} K_n(x, h_x^{(n)})$ と定義すると，次の 3 つの条件はすべて同値になる。

- $z \in A(x)$
- $\varphi(x) \approx \varphi(T^z x)$
- $A(T^z x) + z = A(x)$

$A(x)$ と (1), (2) を用いてすぐに分かることは，

(i) $x \in X \setminus Y \;\Leftrightarrow\; A(x) = \mathbb{Z}^d$
(ii) $x \in Y \;\Leftrightarrow\; A(x) \neq \mathbb{Z}^d$

今 $L(x) = \varphi(\mathrm{Orb}_{\mathbb{Z}^d}(x))/\approx$ と定義し，$\{\xi_i\}_{i \in L(x)} \subset \mathbb{Z}^d$ を $i \neq i'$ のとき $\varphi(T^{\xi_i}x) \not\approx \varphi(T^{\xi_{i'}}x)$ とする。すると次のことが分かる。

(iii) $\cup_{i \in L(x)}(A(T^{\xi_i}x) + \xi_i) = \mathbb{Z}^d$ (排反和)
(iv) $x \notin Y \;\Leftrightarrow\; |L(x)| = 1$
(v) $x \in Y \;\Leftrightarrow\; |L(x)| > 1$

Skau の $\mathbb{Z}^d$ action の場合の予想を考える上で重要なのは，Y の構造である。$d = 1$ の場合, $Y^\sharp = \{x_0, T^{-1}x_0\}$ となるため, Y は可算集合になる。ここで $Y^\sharp$ が 2 点からなる集合になることは，$\cap_{n \geq 1} U_n = \{x_0\}$ となることから出てくる。では $d \geq 2$ の場合はどうなるかというと，一般に $Y^\sharp$ は非可算集合になってしまう。それは $d = 1$ の場合のように $\cap_{n \geq 1} U_n = \{x_0\}$ を仮定したとしても一般に非可算集合になる。従って $d \geq 2$ の場合に $\cap_{n \geq 1} U_n = \{x_0\}$ を仮定しなかったのはこのことがあるからである。因みに $Y^\sharp$ が可算集合，$L(\cdot)$ が一様有界 (i.e. ある $c \geq 1$ が存在して $|L(x)| \leq c$ がすべての $x \in X$ で成り立つ) のとき Skau の予想は正しいことが示されるのだが，残念ながらこの仮定を満たす free Z^d action minimal Cantor system の例があるかどうか分かっていない。従って $Y^\sharp$ が非可算集合である場合で予想を考えていかなければならないだろう。

5　Skau 予想の例

この節では Skau 予想の $\mathbb{Z}^2$ action の場合で正しい例を挙げる。この例は実はより一般的な場合に言うことが出来るので，まずその主張を示した上で紹介することにする。

定義 5.1 (AF system). $\mathcal{B} = (V, E)$ を simple Bratteli diagram であるとする。また $X_{\mathcal{B}}$ を $\mathcal{B}$ の infinite path space とし，位相を前に定義したのと同様なものとする。$\mathcal{B}$ の simpleness から $X_{\mathcal{B}}$ は Cantor 集合になる。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，Γ_n を $\mathcal{P}(V_n)$ の元による置換で，path の source を変えないものとする。すなわち $\gamma \in \Gamma_n$ とすると $r(\gamma(p)) = r(p)$ が任意の $p \in \mathcal{P}(V_n)$ で成立する。各 $\gamma \in \Gamma_n$ に対して $X_{\mathcal{B}}$ 上に次のようにして同相写像

(再び γ と書く) が定義できる。

$$\gamma(e_1, e_2, \cdots) = (f_1, f_2, \cdots, f_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \cdots) \in X_{\mathcal{B}}$$

ここで，$(f_1, f_2, \cdots, f_n) = \gamma(e_1, e_2, \cdots e_n)$ である。よって Γ_n を $X_{\mathcal{B}}$ 上の同相写像の集合 (群) と思い直すと，$\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ が成立する。$\Gamma = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n$ としたとき，$(X_{\mathcal{B}}, \Gamma)$ を $\mathcal{B}$ の AF system と呼ぶ。

AF system において coorbital な構造は infinite path space では，cofinal な構造であることと同値であることがすぐ分かる。AF system に関して詳しくは [Kr] を見られたい。Giordano, Putnam, Skau らは $\mathbb{Z}$ action Cantor minimal system と AF system に関して次の命題を得た。

命題 **5.2 ([GPS]:Lemma 6.1.).** AF system は $\mathbb{Z}$ action Cantor minimal system と軌道同型になる。

定義 **5.3 (product action Cantor system).** $n \in \mathbb{N}$ とする。(X_i, T_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を $\mathbb{Z}$ action Cantor minimal system とする。$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ (Cartesian product) とし，X 上での同相写像 $\mathrm{id} \times \mathrm{id} \times \cdots \times T_i \times \cdots \times \mathrm{id}$ から生成される (可換) 群を G とおく。すると G は X 上で minimal かつ free に作用することが分かる。この (X, G) を ((X_i, T_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ から作られる) product $\mathbb{Z}^n$ action Cantor system と呼ぶ。

定理 **5.4 ([Sk2]).** product $\mathbb{Z}^n$ action Cantor system は $\mathbb{Z}$ action Cantor minimal system と軌道同型になる。

(略証) (X, G) を (X_i, T_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ から作られる product $\mathbb{Z}^n$ action Cantor system であるとする。各 i に対して命題 5.2 から (X_i, T_i) と軌道同型になる AF system $(X_{\mathcal{B}_i}, \Gamma_i)$ が存在する。すると (X, G) は $(X_{\mathcal{B}_i}, \Gamma_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ から作られる n 次元 product action Cantor system (X', G') と軌道同型になることが分かる。一方 (X', G') は AF system になることが分かるので，再び命題 5.2 からある $\mathbb{Z}$ action Cantor minimal system (Y, S) が存在して (X', G') と軌道同型になる。従って (X, G) は (Y, S) と軌道同型なる。 □

次に示す例は Skau の予想が正しいことが分かる例である。(正しいことが分かるのは定理 5.4を用いればよい。)

(例) $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ を $\mathbb{Z}^2$ の基底とする。product $\mathbb{Z}^2$ action Cantor system $(X, \mathbb{Z}^2)$ を次のように定義する。$p = (p_1, p_2, \cdots) \in X$ とする。p の奇数番目の項に関して次の二つの場合分けが出来る。

(i) ある自然数 n が存在して $p_{2n-1} = 0$ となる。
(ii) すべての自然数 n に対して $p_{2n-1} = 0$ となる。

(i) のとき，$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid p_{2n-1} = 0\}$ と定義する。このとき X 上の同相写像 T^{e_1} を次のように定義する。

$$T^{e_1}p = \begin{cases} (0, p_2, 0, p_4, \cdots, 0, p_{2n_0-2}, 1, p_{2n_0}, p_{2n_0+1}, \cdots), & \text{(i) のとき} \\ (0, p_2, 0, p_4, \cdots, 0, p_{2n-2}, 0, p_{2n}, 0, p_{2n+2}, 0, \cdots), & \text{(ii) のとき} \end{cases}$$

同様に p の偶数番目の項に次の二つの場合分けが出来る。

(iii) ある自然数 n が存在して $p_{2n} = 0$ となる。
(iv) すべての自然数 n に対して $p_{2n} = 0$ となる。

(iii) のとき，$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid p_{2n} = 0\}$ と定義する。このとき X 上の同相写像 T^{e_2} を次のように定義する。

$$T^{e_2}p = \begin{cases} (p_1, 0, p_3, 0, \cdots, 0, p_{2n_0-1}, 1, p_{2n_0+1}, \cdots), & \text{(iii) のとき} \\ (p_1, 0, p_3, 0, \cdots, 0, p_{2n-1}, 0, p_{2n+1}, \cdots), & \text{(iv) のとき} \end{cases}$$

この 2 つの同相写像から生成される群は可換であり，X 上で minimal かつ free に作用する。このとき Forrest に構成は次のようになる。$U_n = \{(p_1, p_2, \cdots) \in X \mid p_i = 0,\ 1 \leq i \leq 2n\}$ と定義すると

- $x \in U_n$ に対して，$H(x, U_n) = \{(2^n l, 2^n m) \mid l, m \in \mathbb{Z}\}$
- $I_n = 1$
- $K_n(1) = \{(l, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid -2 < l, m \leq 0\}$
- $\partial K_n(1) = \{(l, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid l = 0 \text{ or } l = 2^n - 1 \text{ or } m = 0 \text{ or } m = 2^n - 1\}$
- $Y_n = \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid$ 任意の $i \in [1, n]$ に対して $p_{2i-1} = 0 \text{ or } p_{2i-1} = 1 \text{ or } p_{2i} = 0 \text{ or } p_{2i} = 1\}$
- $Y^\sharp = \{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid$ 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $p_{2n-1} = 0 \text{ or } p_{2n-1} = 1 \text{ or } p_{2n} = 0 \text{ or } p_{2n} = 1\}$

これより $Y^\sharp$ は非可算集合になる。S を X 上の加算機変換とすると，(X, S) は Cantor minimal system になる。この例による product $\mathbb{Z}^2$ action Cantor system は, (X, S) と軌道同型になる。(但しこれら力学系から付随する次元群の考察が必要である。)

参考文献

[CFW] A.Connes, J.Feldman, B.Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation,* Ergodic Th. & Dynam. Sys. **1** (1982), 431–450

[Fo] A.H.Forrest, *A Bratteli diagram for commuting homeomorphisms of the Cantor set,* to appear in Internatinal J. Math.

[GPS] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Topological orbit equivalence and C^* crossed products,* Journal f. d. reine und angewndte Mathematik **469** (1995), 51–111

[HPS] R.H.Herman, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Ordered Bratteli diagrams,dimension groups, and topological dynamics,* Internat.J.Math. **3** (1992), 827–864

[Kr] W. Krieger, *On a dimension for a class of homeomorphism groups,* Math. Ann **252** (1980), 87–95

[Sk1] C.F.Skau, *Orbit structure of topological dynamical systems and its invariants,* Operator Algebras And Quantum Field Theory (1996), 533–544, International Press

[Sk2] C.F.Skau, Private communications.